Elmer B. Mode

Elementos de Probabilidad y Estadística

EDITORIAL REVERTÉ

Elementos de Probabilidad y Estadística

ELMER B. MODE
Profesor de Matemáticas
de la Universidad de Boston



EDITORIAL
REVERTÉ

Barcelona · Bogotá · Buenos Aires · México

Título de la obra original:
Elements of Probability and Statistics

Edición original en lengua inglesa publicada por:
Prentice – Hall., Inc. U. S. A.

Versión española por:
Ing. Dr. R. García Garza

Edición en español

Edición en papel
ISBN: 978-84-291-5092-6

Edición ebook (PDF)
ISBN: 978-84-291-9121-9

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
Tel: (34) 93 419 33 36
e-mail: reverte@reverte.com
www.reverte.com

409

Prefacio

En años recientes, ha ido en aumento el deseo de enseñar probabilidad y estadística en un solo curso: primero, porque la probabilidad por sí misma ha llegado a ser una herramienta necesaria en muchos campos de la actividad intelectual y, segundo, porque constituye la piedra angular sobre la que descansa la vasta estructura de la estadística moderna. El objetivo principal de este libro es desarrollar los conceptos básicos y las reglas de la probabilidad matemática y mostrar cómo esto nos proporciona modelos para la solución de problemas prácticos, especialmente para los de naturaleza estadística.

Este texto no se inclina por ninguna área de aplicación en particular. Los ejemplos y ejercicios han sido seleccionados de muchos campos, tales como la biología, la educación, la economía, la genética, la psicología y la sociología. Como prerrequisito matemático, se requiere el conocimiento de la cantidad usual de matemáticas que se imparten en cursos preprofesionales, alrededor de dos años de álgebra, como mínimo. Sin embargo, en la sección 9.6 se consideró conveniente incluir una definición formal del integral definido, pero esta parte puede omitirse, a discreción del instructor. El capítulo referente a las cadenas de Markov está asociado más bien con los capítulos 2 a 5 relativos a probabilidad, pero se consideró prudente colocarlo al final del libro, ya que muchos cursos no disponen del tiempo necesario para incluirlo.

La presentación del material ofrece varias alternativas en el contenido del curso por seguir. Dos de éstas son como sigue:

1) *Un curso breve de probabilidad.* Aquí podrían estudiarse el capítulo 1 (secciones 1, 3 y 4), capítulos 2-5, capítulo 7 (secciones 1-3, 6, 8 y 9), capítulo 8, capítulo 9 (secciones 6-8), capítulo 10 (secciones 1-10, 13), capítulo 11 (sección 1), capítulo 12 (secciones 3, 4), capítulo 13 (secciones 2, 3, 5), capítulo 14 (secciones 1, 2 y 4), capítulo 15 (secciones 1-10), capítulo 16 (secciones 3 y 4), y capítulo 19.
2) *Un curso reducido de probabilidad y estadística.* Se sugiere este curso por la omisión de las secciones 5.4-5.6, 10.11, 10.12, 12.4, capítulo 14 secciones 15.7, 15.8, 15.11 y capítulo 19.

En términos generales, los temas más complejos tales como funciones bivariantes, regresión y correlación, y los procesos de Markov, aparecen al final del libro.

El autor agradece a la Albacea Literaria del finado Sir Ronald A. Fisher, F. R. S., Cambridge, y a Oliver and Boyd, Ltd., Edinburgo, su consentimiento para reimprimir las tablas números III, IV y V. A. de su libro *Statistical Methods for Research Workers*. El autor está agradecido también al profesor Egon S. Pearson y a los Depositarios de Biometrika, a los profesores Wilfrid J. Dixon y Alexander M. Mood, y a McGraw-Hill Book Company por el uso de cartas o tablas que aparecen al final del libro. También agradece el autor a la profesora Elizabeth A. Shuhany sus sugerencias para hacer más clara la exposición del manuscrito.

E. B. M.

Contenido

1

Introducción

Los juegos de azar son probablemente tan antiguos como el deseo humano de obtener algo a cambio de nada; pero sus implicaciones matemáticas no llegaron a apreciarse hasta que Fermat y Pascal redujeron a leyes el azar en 1654.

ERIC T. BELL
The Development of Mathematics[1]

1.1. PROBABILIDAD

Muchas frases que se usan en el lenguaje común contienen elementos de incertidumbre: "Probablemente mañana lloverá." "Es probable que el equipo de la Liga Americana gane la Serie Mundial." Esta nueva droga podría ser eficaz para combatir la influenza." Si se dijera: "Apuesto 2 a 1 que lloverá" o "Apuesto 7 a 3 que el equipo de la Liga Americana ganará", entonces se estaría tratando de medir la incertidumbre, aunque en forma rudimentaria. La teoría de la probabilidad matemática nos proporciona las bases para construir medidas exactas de incertidumbre y constituye el fundamento de la vasta estructura que ha llegado a ser la estadística moderna. Existen muchas áreas, sin embargo, donde la incertidumbre no es susceptible al análisis matemático.

A mediados del siglo XVI, Girolamo Cardano, el matemático, médico y jugador italiano, escribió su *Liber de Ludo Aleae* ("El libro de los juegos de azar") en el que apareció el primer estudio conocido de los principios de probabilidad. Alrededor de cien años más tarde, el jugador Chevalier de Méré propuso a Blaise Pascal el famoso "Problema de los puntos", que puede describirse como sigue: Dos personas participan en un juego de azar. La primera que logre acumular un cierto número de puntos ganará la apuesta. Si los jugadores se ven forzados a suspender el juego antes de que éste haya terminado, dado el número de puntos que ha acumulado cada uno de ellos, ¿cómo deberá

[1] Copyright 1940, McGraw-Hill Book Company. Usado con autorización.

dividirse la apuesta? Este problema constituyó un reto al ingenio de los astutos matemáticos franceses Blaise Pascal y Pierre de Fermat. Los métodos empleados por Cardano y Pascal representan la iniciación de la probabilidad matemática sobre la que está centrada la teoría estadística actual. La publicación de Laplace, en 1812, de su *Théorie Analytique des Probabilités*, que hizo época, fijó los fundamentos para esta teoría.

1.2. ESTADISTICA

Es curioso hacer notar que la moderna ciencia de la estadística tiene su origen en dos intereses humanos muy diferentes: Los estados políticos y los juegos de azar. A mediados del siglo XVIII, nació la palabra estadística, significando el estudio de " los arreglos políticos de los estados modernos del mundo conocido". Inicialmente, la descripción de los estados era verbal, pero la proporción creciente de datos numéricos en las descripciones gradualmente dio a la nueva palabra el carácter cuantitativo que ahora se asocia en ella. A partir del estudio restringido de datos que pertenecen al estado, la estadística se ramificó en otros campos de la investigación.

Entre 1835 y 1870, el astrónomo belga Quetelet, aplicaba ya la teoría de la probabilidad a mediciones antropológicas. Sus conclusiones se pueden resumir y ampliar mediante la siguiente proposición: Las mismas leyes generales de variación que gobiernan la suerte de un jugador pueden descubrirse en las estaturas de soldados, los cocientes de inteligencia de los niños, las presiones sanguíneas de adultos, las velocidades de las moléculas de un gas y en muchos otros agregados de observaciones.

En tiempos más recientes, una escuela inglesa de estadística, bajo el liderazgo de Karl Pearson (1857-1936) y Sir Ronald A. Fisher (1890-1962), ha hecho contribuciones notables, tanto a la estadística teórica como a la estadística aplicada. El alcance de los métodos generales basados en conceptos probabilísticos llegó a ser más evidente y, como resultado, se han hecho aplicaciones a muchos campos de la investigación. Para cualquier persona educada, es un objetivo serio y legítimo llegar a apreciar la importancia de los métodos estadísticos en el intento del hombre de conocer mejor el maravillosamente complejo mundo físico y social.

1.3. PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

La teoría de la probabilidad es un sistema matemático compuesto de términos definidos e indefinidos y de un conjunto de suposiciones relativas a ellos; de todo esto obtenemos conclusiones lógicas, esto es, demostramos teoremas. Es una disciplina abstracta que usamos como modelo para hacer deducciones relativas a eventos que posiblemente pueden suceder en una operación física real o imaginaria. Por ejemplo, supongamos que tenemos un par de dados. Pensemos que uno de estos dados es perfecto. Esto es, parece ser un cubo perfecta-

mente homogéneo con puntos en sus seis caras —un punto en una cara, dos puntos en una segunda cara, tres puntos en una tercera cara, y así sucesivamente hasta seis puntos en la sexta cara. Debido a su simetría y homogeneidad, podemos creer que, cuando lancemos este dado sobre una superficie plana, existe la misma posibilidad de que muestre una de las caras hacia arriba o cualquier otra, pero nuestra creencia puede no estar totalmente justificada. Sin embargo, podemos suponer que la probabilidad de que aparezca un número dado de puntos es $^1/_6$.

Partiendo de que hemos asignado la probabilidad de $^1/_6$ para cada cara, desarrollaremos las leyes de azar para juegos de dados en los que se utilizarían dados idealizados. Por ejemplo, como veremos más adelante, si se lanzan dos dados perfectos, la probabilidad de que aparezca la suma de puntos siete u once es $^2/_9$. Así, la teoría de la probabilidad nos permite hacer deducciones partiendo de modelos matemáticos (dados idealizados) que esperamos sean suficientemente exactas al ser utilizadas para conocer el comportamiento de juegos de dados perfectos.

Ahora, consideremos otro dado, que supondremos es un cubo de material no homogéneo —un dado cargado. Mediante un examen físico, no podemos estimar la probabilidad de que aparezca hacia arriba alguna de las seis caras al lanzar este dado. Sin embargo, podemos efectuar un experimento tal como lanzar 100 veces este dado, observando la frecuencia con que apareció hacia arriba cada una de las 6 caras. Con base en nuestros resultados experimentales, podemos hacer estimaciones de las probabilidades de obtener cualquiera de los seis números en un solo lanzamiento. Estas estimaciones (ya que no son otra cosa), a pesar de ser incompletas, poseen una propiedad deseable, se pueden establecer proposiciones exactas en cuanto a que la probabilidad de la estimación sea correcta. Por ejemplo, si la cara con 5 puntos apareció 25 veces en 100 lanzamientos, esto nos haría pensar que la probabilidad para el número 5 es alrededor de $^1/_4$. Esta estimación tiene la desventaja de que no podemos saber el grado de aproximación a la verdad y, para muchos usos prácticos, no es muy útil. Sin embargo, los métodos estadísticos que se estudiarán más adelante nos permiten establecer que la probabilidad del 5 al lanzar este dado cargado está comprendida entre 0.17 y 0.33. Casi tenemos la seguridad de que esta afirmación es correcta.[2] Si esta estimación no es suficientemente apropiada, podemos efectuar un número mayor de lanzamientos del dado. Por ejemplo, si el 5 apareció 250 veces en 1000 lanzamientos, se estimará una probabilidad comprendida entre 0.22 y 0.28.[2]

La estadística implica procesos repetitivos: Por ejemplo, se lanza el dado 100 veces, se tiene el resultado de la presión sanguínea de 50 soldados, se investiga la resistencia a la tensión de 10 cuerdas de cáñamo, se suministra una prueba verbal de aptitud a 247 estudiantes, etc. Se podría decir, entonces,

[2] Será correcta alrededor del 95% de las veces. Véase la sección 16.9.

que en la teoría de la probabilidad empezamos con leyes de azar supuestas que utilizamos como modelo para guiarnos al predecir los resultados de ciertos experimentos. En la estadística, examinamos los resultados de operaciones repetitivas y después intentamos interpretarlos con la ayuda de las probabilidades estimadas.

Los párrafos precedentes constituyen solamente un primer intento no muy adecuado para entender la probabilidad y la estadística; sin embargo, nos pueden ser de utilidad en capítulos siguientes. En ellos veremos con mayor claridad las funciones de estos dos campos interconectados de estudio.

1.4. APLICACIONES

Además del importante papel que desempeña la probabilidad en la teoría de estadística y sus aplicaciones, tiene muchos usos en otros campos. Algunos de ellos se describen brevemente a continuación:

i) *Teoría de la genética.* Los individuos apareados al azar con características físicas y mentales similares o diferentes, procrean una generación cuyos atributos podemos desear estudiar. Con las medidas apropiadas de probabilidad de la presencia de ciertos genes, se pueden hacer predicciones provechosas relativas a la herencia.

ii) *Juegos de azar.* Los juegos de cartas, dados, monedas, etc., son susceptibles al análisis con miras a satisfacer la curiosidad de los participantes a gobernar la estrategia de juegos o a decidir la equidad de un juego. Por ejemplo, libros del tipo "Cómo jugar bridge", contienen muchas probabilidades calculadas de sucesos relativos a ciertas combinaciones de cartas.

iii) *Estrategia militar.* La frase "Riesgo calculado" se usa a menudo, particularmente con referencia a problemas de la guerra. Las situaciones idealizadas se sujetan al análisis probabilístico y se desarrollan estrategias óptimas. En el combate real, se pueden usar estimaciones sofisticadas que implican probabilidades e información obtenida de varias fuentes para determinar las acciones más apropiadas.

iv) *Las ciencias físicas.* La teoría cinética de los gases y el fenómeno de "el camino al azar" son únicamente dos de muchos casos donde operan las leyes de la probabilidad o estadística.

v) *Industria.* Algunos ejemplos donde rigen las leyes de la probabilidad en operaciones y procesos industriales son el tráfico telefónico, líneas de espera (el problema de atender eficientemente líneas variables de personas), y la teoría de la presencia de lotes de artículos defectuosos en un proceso de fabricación.

2

Conjuntos

Unter einer "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wholunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von M genannt wenden) zu einen Ganzen.[1]

GEORG CANTOR
Mathematische Annalen, 1895

2.1. INTRODUCCION

La noción simple de una colección o conjunto de objetos es fundamental en la estructura básica de las matemáticas y fue Georg Cantor, en los años de 1870, quien primero llamó la atención de los matemáticos a este respecto. La teoría de los conjuntos tiene ventajas particulares en la formulación de definiciones y en la derivación de las leyes de la probabilidad. Por esta razón, desarrollaremos algunas de las propiedades elementales de los conjuntos. No puede darse una definición satisfactoria de un conjunto en términos de conceptos más simples; por lo tanto, la palabra "conjunto" debe aceptarse lógicamente como un término no definido. Sin embargo, para caracterizar sus propiedades, usamos descripciones o sinónimos de la palabra, tales como colección, agregado, clase, y la palabra Menge, introducida por Cantor.

A continuación, se dan algunos ejemplos de conjuntos:

i) Las letras, a,b,c,d,e,f,g.
ii) Los cuadrados de los números primos positivos menores que 12.
iii) Los Diez Mandamientos.
iv) Los presidentes de los Estados Unidos hasta 1965.

[1] Se entiende por conjunto M, una colección de un todo único de objetos definidos, distinguibles de nuestra percepción o nuestro pensamiento que se llaman "Elementos" de M.

v) Los enteros positivos.
vi) Sus abuelos que aún viven.
vii) Los colores básicos del espectro.

Debe entenderse que un conjunto está constituido de cualquier número de objetos distinguibles, objetivamente o mentalmente. Para estos objetos emplearemos un término matemático apropiado, "elemento"; es esencial que el conjunto sea bien definido. Esto significa que, dado un objeto o elemento, se debe poder establecer con certeza si pertenece, o no, a un conjunto determinado.

Un método de definir un conjunto es hacer una lista de sus miembros. Así, en el caso (i), se da una lista de los elementos; en el (ii), los elementos son 2^2, 3^2, 5^2, 7^2 y 11^2; en el caso (iii) podemos listar los elementos de acuerdo con el libro de Exodo; en el (iv) podemos escribir Washington, Adams, Jefferson, etc., hasta el presente; en el caso (v), la lista será 1, 2, 3,... En este caso, el número de elementos es infinito (como se indica por la sucesión de puntos), puesto que el proceso de contar puede continuar indefinidamente. En el caso (vi), si usted no tiene abuelos que aún viven, el conjunto es un conjunto vacío o conjunto nulo, un conjunto sin elementos. Este conjunto especial es sumamente útil, ya que desempeña un papel en la teoría de conjuntos, similar al del cero en aritmética; sin embargo —y en esto debe ponerse énfasis— un conjunto vacío no es cero; lo que es cero es el número de elementos contenidos en él.

En la notación de conjuntos, se emplea un par de corchetes para encerrar los elementos de un conjunto. De este modo, definimos los conjuntos de nuestras ilustraciones como sigue:

i) $L = \{a,b,c,d,e,f,g\}$.
ii) $M = \{4,9,25,49,121\}$.
iv) $P =$ {Washington, Adams, Jefferson, , , Johnson}.[2]
v) $I = \{1,2,3, , ,\}$.
vii) $C =$ {rojo, naranja, amarillo, verde, azul, índigo, violeta}.

En el caso (iii), podríamos presentar una lista de los Mandamientos según la Biblia; pero sería innecesario e inconveniente, a menos que se requiera hacerlo precisamente en esa forma. En el caso (vi), si usted no tiene abuelos que aún vivan, el conjunto vacío G, se representa por el símbolo estándar $\varnothing$. Entonces, $G = \varnothing$, el conjunto vacío.

Un segundo método de caracterizar a un conjunto, es establecer las propiedades distintivas de sus elementos. En esta forma, podemos escribir:

[2] Hasta 1965.

i) L = {las primeras siete letras del alfabeto}.
ii) M = $\{x^2 \mid x$ es un número primo positivo menor que 12$\}$.
Aquí, el símbolo " | " se lee "tal que".
iv) P = {los presidentes de los Estados Unidos de Norteamérica desde Washington hasta Johnson}.
v) I = {los enteros positivos}.
vii) C = {los colores básicos del espectro}.

Como un ejemplo más, consideremos

$$A = \{x \mid x = 2k^2 + 5;\ k = 1,2,3,\ ,\ ,\}.$$

Aquí, el conjunto de valores es infinito y se obtiene al permitir que k tome todos los valores enteros positivos.

Algunas veces, los miembros de un conjunto son parejas de objetos, triadas de objetos o, en general, eneadas de ellos. Así,

$$\text{(viii)} \quad O = \{HH, HT, TH, TT\}$$

representa el conjunto de resultados posibles; "caras" o "cruces", cuando se lanzan dos monedas. En este caso, la primera letra corresponde a una moneda en particular y, la segunda letra, a la otra moneda.

$$\text{(ix)} \quad B = \{(x,y,z), (x,z,y), (y,x,z), (y,z,x), (z,x,y), (z,y,x)\}.$$

Este conjunto está formado por los arreglos posibles o permutaciones de las letras x, y y z.

Nótese que el cambio de orden de los miembros de un conjunto no altera a ese conjunto. Así, por ejemplo, en (i)

$$L = \{a,b,c,d,e,f,g\} = \{b,d,f,g,a,c,e\}$$

y en (vii)

$$C = \{r,o,y,g,b,i,v\} = \{v,i,b,g,y,o,r\}$$

donde las letras son abreviaciones que representan a los colores. A este respecto, nótese que en (ix) un miembro es una triada; sin embargo, las letras x, y y z no son elementos del conjunto, sino constituyentes de los elementos. Por otra parte, los elementos de un conjunto deben ser diferentes entre sí; no deben existir elementos duplicados.

Frecuentemente se define un conjunto mediante una fórmula o ecuación. Así,

$$U = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

define el conjunto de números ordenados (x,y) tales que $x^2 + y^2 = 1$; estas parejas ordenadas corresponden a puntos de un círculo unitario con centro en el origen (0,0). Este es otro ejemplo de un conjunto infinito.

Es conveniente indicar cuáles elementos son miembros de un conjunto dado y cuáles no lo son. Para esto empleamos el símbolo $\in$ que significa "es miembro de" o "pertenece a", y el símbolo $\notin$ significa "no es miembro de" o "no pertenece a".

Así, en i) $c \in L$ pero $h \notin L$;
ii) $9 \in M$ pero $10 \notin M$;
v) Lincoln $\in P$ pero Bryan $\notin P$.

2.2. RELACIONES Y OPERACIONES

Se dice que dos conjuntos **A** *y* **B** *son iguales si cada elemento de uno es elemento del otro.* En este caso, se escribe **A** = **B**. Así, si **A** = $\{a,b,c,d\}$ y **B** = $\{b,d,a,c\}$, entonces **A** = **B**.

Se dice que un conjunto **A** *es un subconjunto del conjunto* **B** *si cada elemento de* **A** *es también un elemento de* **B**. La relación $A \subset B$ se lee "A está contenido en B" o "A es un subconjunto de B". Nótese que, de acuerdo con esta definición, cualquier conjunto es un subconjunto de sí mismo, de tal modo que $A \subset A$. Si A es un subconjunto de B pero $A \neq B$, entonces A es un subconjunto propio de B. Por ejemplo, en (i), $\{a,c,d\} \subset \{a,b,c,d,e,f,g\}$ y en (v), $\{2,4,6,,,\} \subset \{1.2.3.,,\}$. En este caso, los enteros positivos pares constituyen un subconjunto propio de los enteros positivos.

En (iii), el *conjunto unitario* (un conjunto que contiene únicamente un elemento) {No matarás} $\subset$ {Los Diez Mandamientos}. También definimos $\varnothing$ como un subconjunto de todos los conjuntos: $\varnothing \subset A$ para todo A y $\varnothing \subset \varnothing$.

La unión de dos conjuntos **A** *y* **B** *es el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto* **A** *o al conjunto* **B**, *o a ambos.* Se simboliza por $A \cup B$, que puede leerse "A unión B".

EJEMPLO 1. Si $A = \{a,b,c\}$ y $B = \{b,d,e\}$, entonces $A \cup B = \{a,b,c,d,e\}$.

EJEMPLO 2. Si M = {los miembros hombres de su familia}
y

F = {los miembros mujeres de su familia)}

entonces,

$M \cup F$ = {los miembros de su familia}

EJEMPLO 3. Considérense los dos conjuntos:

D = {Los demócratas de Massachusetts}

T = {Los choferes de camiones en Massachusetts}.

Entonces

$$D \cup T = \{\text{Los demócratas o los choferes de camiones o ambos de Massachusetts}\}.$$

Nótese que para cualquier conjunto A,

$$A \cup \varnothing = A.$$

La intersección de dos conjuntos **A** y **B** *es el conjunto cuyos elementos pertenecen simultáneamente a* **A** y a **B**. Se simboliza por $A \cap B$ y se lee "A intersección B". Así, para el ejemplo 1, $A \cap B = \{b\}$.

Para el ejemplo 2, $M \cap F = \varnothing$, y para el ejemplo 3, $D \cap T$ {Los choferes de camiones que son demócratas en Massachusetts}.

Nótese que, para cualquier conjunto A,

$$A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Se dice que dos conjuntos **A** *y* **B** *son disjuntos o mutuamente excluyentes si no tienen elementos en común, esto es, si* $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$.

En el ejemplo 2, los miembros hombres y mujeres de su familia son conjuntos disjuntos, esto es, $M \cap F = \varnothing$.

En la teoría de conjuntos, con frecuencia nos referimos a ciertos conjuntos básicos o *conjuntos universales,* de manera similar a la idea de "universo de discusión" en la lógica. Este conjunto se representará mediante la letra mayúscula U. Si, por ejemplo, estamos analizando las costumbres de votación de la ciudad de Boston, podemos escribir.

$$U = \{\text{todos los votantes de Boston}\}.$$

En relación a este conjunto, podemos interesarnos en muchos subconjuntos diferentes de U, tales como los votantes hombres, los votantes independientes, los votantes católico romanos, los votantes independientes que votaron por el Partido Republicano en 1964, los votantes del sur de Boston, etc.

Si **M** *y* **M′** *son cualquier par de conjuntos disjuntos, tales que* $\mathbf{M} \cup \mathbf{M'} = \mathbf{U}$, *se dice que estos conjuntos son complementarios (con respecto a* **U**).
Así, si

$$U = \{\text{todos los votantes de Boston}\}$$

$$M = \{\text{todos los votantes hombres de Boston}\}$$

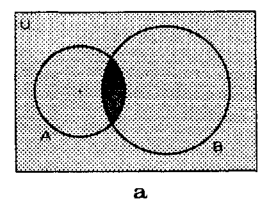
y

$$M' = \{\text{todos los votantes mujeres de Boston}\}$$

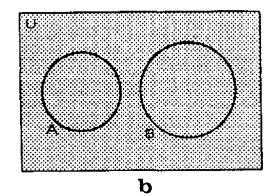
entonces, M y M' son complementarios con respecto a U.

En el ejemplo 2, M y F son conjuntos complementarios en relación al conjunto S = {los miembros de su familia}, puesto que $M \cup F = S$, y $M \cap F = \varnothing$. Entonces, $M = F'$ y $F = M'$. Cada uno de estos subconjuntos, M o F, es el complemento del otro.

Si el conjunto universal es (i) y $A = \{a,b,c\}$, entonces $A' = \{d,e,f,g\}$; si el conjunto universal es (v) y E = {los enteros pares} entonces E' = {los enteros impares}.



a

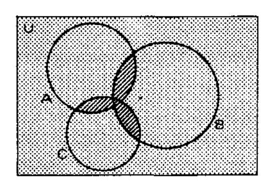


b

Fig, 2-1

2.3. DIAGRAMAS DE VENN

Con frecuencia, es muy útil representar a los elementos de un conjunto mediante puntos, y al conjunto mismo mediante un agregado de estos puntos contenidos dentro de un círculo o de cualquier región cerrada simple. Esta forma, que se emplea para derivar las propiedades de los conjuntos, fue sugerida por John Venn, en 1881. Una forma conveniente, aunque no estrictamente necesaria de representar al conjunto universal, es mediante un rectángulo. Así, en la Fig. 2-1a, los puntos dentro de las regiones circulares A y B representan dos subconjuntos de U que se intersecan. En la Fig. 2-1b, A y B representan dos conjuntos disjuntos. En la Fig. 2-2, los tres círculos representan a tres subconjuntos A, B y C que se intersecan mutuamente.



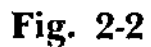


Fig. 2-2

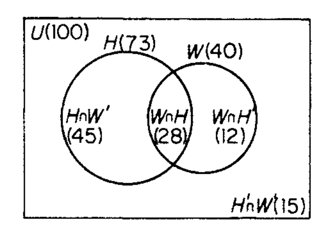


Fig. 2-3

EJEMPLO 1. Supongamos que la clase de primer año de una universidad está formada por 100 estudiantes. De éstos, 40 son mujeres, 73 estudian historia y 12 son mujeres que no estudian historia. ¿Cuántos hombres no estudian historia?

Solución. Si, de 40 mujeres, 12 no estudian historia, entonces 28 sí lo hacen. Si, de los 73 estudiantes de historia, 28 son mujeres, entonces deben ser 45 los hombres que estudian historia. De los 100 — 40, o 60 hombres, hay 60 — 45, o 15, que no estudian historia. Este problema simple puede también resolverse e ilustrarse con ayuda del diagrama de Venn (Fig. 2-3).

Los pasos en la solución son como sigue:

Mujeres que no estudian historia	$= W \cap H'$	12
Mujeres que estudian historia	$= W \cap H$	$40 - 12 = 28$
Hombres que estudian historia	$= H \cap W'$	$73 - 28 = 45$
Hombres que no estudian historia	$= H' \cap W'$	$100 - (45 + 28 + 12) = 15.$

EJEMPLO 2. En una muestra de 50 amas de casa, 35 tenían aparatos de televisión, 20 tenían recipientes eléctricos para eliminación de desperdicios y 15 tenían radios de alta fidelidad; 15 tenían simultáneamente aparatos de televisión y recipientes eléctricos para eliminación de desperdicios; 10 tenían aparatos de televisión y radios de alta fidelidad y 12 tenían recipientes eléctricos eliminadores de desperdicios y radios de alta fidelidad. Ocho amas de casa tenían los tres aparatos. ¿Cuántas de ellas no tenían ninguno de estos aparatos?

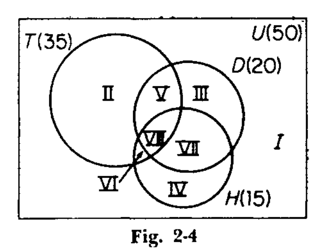


Fig. 2-4

Solución. Es conveniente identificar las regiones del diagrama de Venn (Fig. 2-4) como se muestra en la figura y trabajar de dentro hacia afuera. Así, los números de amas de casa en los varios subconjuntos de U se pueden encontrar como sigue:

Región	*Subconjunto*	*Número de amas de casa*
viii	$(T \cap D) \cap H$	8
v + viii	$T \cap D$	15
vi + viii	$T \cap H$	10
vii + viii	$D \cap H$	12

Mediante una serie de substracciones encontramos los siguientes resultados:

v	$(T \cap D) \cap H'$	7
vi	$(T \cap H) \cap D'$	2
vii	$(D \cap H) \cap T'$	4

Por lo tanto

v + vi + viii $\qquad 7 + 2 + 8 = 17$

de donde

ii $\qquad (T \cap D') \cap H' \quad 35 - 17 = 18$

También.

v + vii + viii $\qquad 7 + 4 + 8 = 19$

de donde

iii $\qquad (D \cap T') \cap H' \quad 20 - 19 = 1$

Análogamente

vi + vii + viii $\qquad 2 + 4 + 8 = 14$

de donde

iv $\qquad (H \cap D') \cap T' \quad 15 - 14 = 1$

Se sigue entonces que,

ii + iii + iv + v +
vi + vii + viii $\qquad (T \cup D) \cup H \qquad 41$

de donde

i $\qquad ((T \cup D) \cup H)' \quad 50 - 41 = 9$

Por lo tanto, 9 amas de casa no tenían ninguno de estos aparatos.

2.4. EL ALGEBRA DE CONJUNTOS

Los diagramas de Venn de la sección precedente son útiles como aproximación intuitiva al álgebra de los conjuntos. Esta álgebra es una álgebra booleana. llamada así en honor del matemático inglés George Boole, cuyo libro, *Investigación de las Leyes del Pensamiento*, en el cual se fundan las *Teorías matemáticas de la lógica y la probabilidad*, fue publicado en 1854. Este importante trabajo contiene conceptos y métodos que aparecen en muchas ramas de la matemática actual.

Existen muchas formas en las que pueden formularse las suposiciones básicas del álgebra de los conjuntos. Lo siguiente será útil para nuestros propósitos. Considérese una clase K de conjuntos $A, B, C, ..$ y dos operaciones $\cup$ y $\cap$, que llamaremos unión e intersección, respectivamente, $A, B, C, ..$ deben satisfacer los siguientes postulados:

Postulado de cerradura. Si **A** *y* **B** *están en* **K**, *entonces* (1a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ y (1b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ también están en **K**.

Postulados conmutativos.
(2a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup \mathbf{A}$
(2b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A}$

Postulados asociativos.
(3a) $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}$
(3b) $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}$

Postulados distributivos.
(4a) $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$
(4b) $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$

El conjunto vacío. Existe un conjunto único $\varnothing$ tal que
(5a) $\mathbf{A} \cup \varnothing = \mathbf{A}$
(5b) $\mathbf{A} \cap \varnothing = \varnothing$

El conjunto universal. Existe un conjunto único **U**, tal que
(6a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$
(6b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{U} = \mathbf{A}$

El conjunto complementario. Para cualquier conjunto **A** existe un conjunto único, **A′**, tal que
(7a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{A}' = \mathbf{U}$
(7b) $\mathbf{A} \cap \mathbf{A}' = \varnothing$

La semejanza de los postulados 1a y b, 2a y b, 3a y b, y 4a con los del álgebra de los números reales, será evidente si reemplazamos la unión con la suma, $\cup$ por $+$, y la intersección por la multiplicación, $\cap$ por $\times$. Nótese que los postulados 4a y b corresponden a leyes distributivas duales en las que la intersección es distributiva ante la unión, y la unión es distributiva ante la intersección. En el álgebra ordinaria, la multiplicación es distributiva ante la suma, $A(B + C) = AB + AC$; pero la suma no es distributiva ante la multiplicación, $A + BC \neq (A + B)\ (A + C)$. $\varnothing$ se comporta como el cero, puesto que $A + 0 = A$ y $A \times 0 = 0$. U se comporta como la unidad en la multiplicación, ya que $A \times 1 = A$.

La conveniencia de estos postulados se comprenderá mejor al representar los conjuntos y sus relaciones mediante los diagramas de Venn. Con base en estos postulados, es posible demostrar muchos teoremas relativos al álgebra de los conjuntos. En lugar de dar pruebas formales, verificaremos algunos de estos teoremas con la ayuda de los diagramas de Venn.

También son de interés dos teoremas desarrollados por el matemático inglés De Morgan (1806-1871).

(8a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
(8b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Verificaremos ahora la ley distributiva 4b y la primera de las leyes de De Morgan mediante los diagramas de Venn.

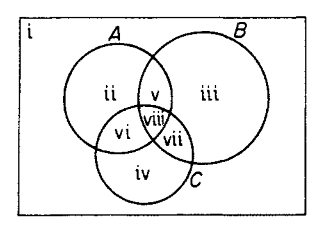
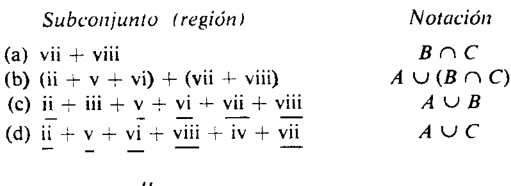


Fig. 2-5

Refirámosnos a la Fig. 2-5. Los subconjuntos (regiones) que aparecen en la columna izquierda de la siguiente tabla pueden simbolizarse mediante las relaciones que se muestran en la columna derecha.



Subconjunto (región)	*Notación*
(a) vii + viii	$B \cap C$
(b) (ii + v + vi) + (vii + viii)	$A \cup (B \cap C)$
(c) $\underline{\text{ii}}$ + iii + $\underline{\text{v}}$ + $\underline{\text{vi}}$ + $\underline{\text{vii}}$ + $\underline{\text{viii}}$	$A \cup B$
(d) $\underline{\text{ii}}$ + $\underline{\text{v}}$ + $\underline{\text{vi}}$ + $\underline{\text{viii}}$ + iv + $\underline{\text{vii}}$	$A \cup C$

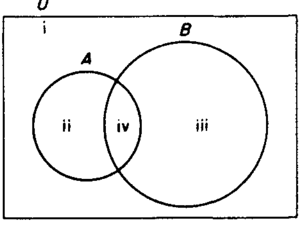


Fig. 2-6

Los símbolos subrayados en los renglones (c) y (d) representan la intersección o región común de $A \cup B$ y $A \cap C$; por lo tanto, el renglón (e) será:

(e) ii + v + vi + viii + vii $\qquad (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Las regiones de (e) son idénticas con las de (b); por lo tanto, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, y el teorema queda "demostrado".

Para verificar que $(A \cup B)' = A' \cap B'$, establecemos lo siguiente de acuerdo con la Fig. 2-6.

Subconjunto (región)	*Notación*
ii + iii + iv	$A \cup B$

Puesto que U = i + (ii + iii + iv), el subconjunto cuya región es i, es el complemento del subconjunto cuya región es (ii + iii + iv). Esto es:

i	$(A \cup B)'$
i + iii	A'
i + ii	B'
i	$A' \cap B'$

Por lo tanto, $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

2.5. PRODUCTOS CARTESIANOS

Un par de objetos a y b pueden examinarse en cuanto a su orden, de modo que podamos establecer que la pareja ordenada (a,b) es diferente de la pareja ordenada (b,a). En esta forma, podemos considerar (a,b) y (b,a) como dos elementos distinguibles del conjunto $\{(a,b), (b,a)\}$ y entonces $(a,b) \neq (b,a)$. Análogamente, $\{(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a)\}$ es un conjunto compuesto de seis triadas ordenadas diferentes.

Las ideas anteriores se pueden generalizar para incluir conjuntos de eneadas (una eneada es un grupo de n objetos) que puede formarse con los n objetos $x_1, x_2, x_3, , , x_n$, de tal modo que cualquier arreglo de estos n objetos puede constituir un elemento de un conjunto. El lector debe distinguir claramente entre los objetos que constituyen un grupo ordenado y los elementos de un conjunto en el que cada elemento es un grupo ordenado. Así, el segundo conjunto del párrafo anterior contiene seis elementos o miembros y cada elemento está formado por un grupo ordenado de las tres letras a, b y c.

Establecimos anteriormente que un conjunto no puede contener elementos por duplicado. Sin embargo, parejas ordenadas, triadas,. . . eneadas, pueden contenerlos. Así, podemos tener el conjunto $\{HHT, HTH, THH\}$ cuyos elementos (triadas ordenadas) son todos diferentes (como debe de ser) entre sí, pero contienen las mismas tres letras H, H y T. Estas letras pueden representar los resultados, "caras" o "cruces", cuando se lanza al aire una moneda tres veces y se obtienen dos caras y una cruz. Si se preguntara: "¿Cuáles son los resultados posibles cuando se lanza una moneda tres veces en sucesión?" encontraríamos la respuesta convenientemente representada mediante el conjunto de las triadas ordenadas

$$\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}.$$

En cada una de estas triadas la primera letra representa el resultado del primer lanzamiento, la segunda letra representa el resultado del segundo lanzamiento y, la tercera, el correspondiente al tercer lanzamiento.

El producto cartesiano **A** $\times$ **B** *se define como el conjunto formado por todas las parejas ordenadas posibles, tomando el primer elemento del conjunto* **A** *y el segundo elemento del conjunto* **B**. Así, si $A = \{a,b\}$ y $B = \{c,d,e\}$, entonces

$$A \times B = \{(a,c), (a,d), (a,e), (b,c), (b,d), (b,e)\}.$$

Nótese que, a menos que A y B sean conjuntos idénticos, $A \times B \neq B \times A$; la ley conmutativa no es válida para los productos cartesianos. Nótese que

$$B \times A = \{(c,a), (c,b), (d,a), (d,b), (e,a), (e,b)\}.$$

Los elementos (parejas ordenadas) de $B \times A$ no son los mismos que los de $A \times B$; el orden es invertido.

Como otro ejemplo, considérese $A = \{H,T\}$. Entonces

$$A \times A = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

Los elementos de A representan los resultados posibles cuando se lanza una moneda, y los elementos de $A \times A$ representan los resultados posibles para dos lanzamientos sucesivos de una moneda o para el lanzamiento de un par de monedas.

El producto cartesiano $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_3 \times \ldots \times \mathbf{A}_n$ *se define como el conjunto formado por todas las eneadas posibles ordenadas cuando el primer elemento se toma del conjunto* $\mathbf{A}_1$, *el segundo elemento del conjunto* $\mathbf{A}_2$, , , *y el enésimo elemento se toma de* $\mathbf{A}_n$.

De acuerdo con los dos ejemplos anteriores, es claro que el número de elementos en $A \times B$ es igual al producto del número de elementos en A y el número de elementos en B, $2 \times 3 = 6$, y que el número de elementos en $A \times A$ es igual al cuadrado del número de elementos en A, $2 \times 2 = 4$. De hecho, se puede demostrar el siguiente:

Teorema. Si el conjunto $\mathbf{A}_i$ *contiene* $\mathbf{n}_i$ *elementos, donde* $i = 1, 2, \ldots, \mathbf{k}$, *el número de elementos contenidos en el producto cartesiano* $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \ldots \mathbf{A}_k$ *es igual a* $\mathbf{n}_1\ \mathbf{n}_2 \ldots \mathbf{n}_k$.

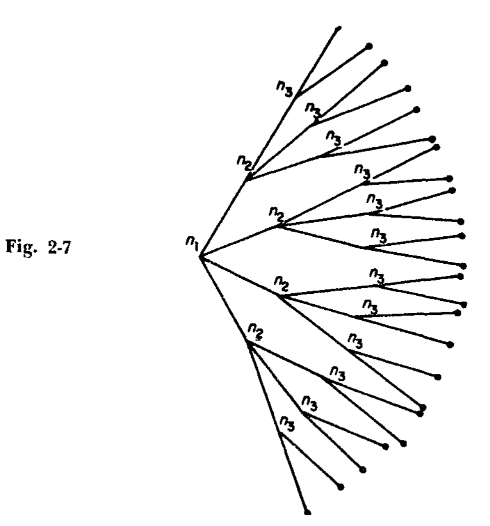
La prueba es muy simple. El primer miembro de una eneada ordenada puede seleccionarse entre los n_1 miembros de A_1; el segundo miembro puede seleccionarse entre los n_2 elementos en A_2. Esto es, para cualquier elección de A_1 existen n_2 elecciones de A_2; por lo tanto, los dos primeros elementos pueden seleccionarse de $n_1 \times n_2$ modos. El tercer elemento puede seleccionarse de n_3 modos, cualquiera de los cuales puede colocarse con cualquiera de las $n_1 \times n_2$ parejas ordenadas de $A_1 \times A_2$; por lo tanto, los primeros tres elementos pueden seleccionarse de $n_1 \times n_2 \times n_3$ modos.

Evidentemente, este razonamiento puede extenderse a los k conjuntos. Mediante la inducción matemática, podría efectuarse una demostración rigurosa.

La exposición de este teorema puede complementarse con la ayuda de un diagrama de árbol, recurso gráfico que encontraremos más adelante. (Véase la sección 4.5.) Por ejemplo, si $n_1 = 4$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 2$, el árbol toma la forma que se muestra en la figura 2-7. Fácilmente se ve que el árbol tiene $4 \times 3 \times 2$ o 24 ramas hacia la derecha.

Ejemplo. Si un estudiante puede elegir, de un grupo de cinco cursos, uno a las nueve; de un grupo de tres cursos, uno a las diez, y de un grupo de cuatro cursos uno a las dos, él puede elegir sus tres cursos de 60 modos diferentes, puesto que cada triada de los cursos elegidos es un elemento del producto cartesiano que tiene $5 \times 3 \times 4$ elementos.

Fig. 2-7



2.6. PARTICIONES

Un recurso útil para estudiar los subconjuntos de un conjunto mayor o conjunto universal es la partición. Para ilustrar este concepto, supongamos que se analizó la composición de un club formado por 20 adultos y se encontraron los siguientes datos:

a) Estado marital: 10 personas casadas, 6 mujeres solteras, 4 hombres solteros.
b) Sexo: 12 hombres, 8 mujeres.
c) Preferencia política: 10 demócratas, 8 republicanos, 2 independientes.

d) Antecedentes educativos: 10 graduados universitarios, 5 con educación universitaria incompleta (sin diploma), 4 con diploma de secundaria únicamente, 1 con educación secundaria incompleta.

Nótese que cada una de estas cuatro clasificaciones tiene tres características simples, pero importantes. Consideremos, por ejemplo, el estado marital. (i) Cada una de las clases, tales como los solteros, es un subconjunto del conjunto mayor constituido por el club. (ii) Ningún miembro del club pertenece a dos subconjuntos de la clasificación marital. (iii) Los tres subconjuntos constituyen totalmente el club. Cada una de las otras tres categorías —sexo, preferencia política y antecedentes educativos— poseen las mismas tres características. Matemáticamente, decimos que el conjunto de personas que constituyen el club ha sido dividido en cuatro grupos diferentes. Por supuesto, podríamos agregar otros grupos: según la edad, afiliaciones religiosas, secciones residenciales, etc. A continuación, estableceremos la definición de una partición.

Sean $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2, , ,$ $\mathbf{E}_n$, *subconjuntos de un conjunto* **S**. *Se dice que estos subconjuntos forman una partición de* **S** *si se satisfacen las siguientes propiedades:*

i) *Cada* $\mathbf{E}_i$ *es un subconjunto propio de* **S**, *esto es,*

$$E_i \subset S, \qquad i = 1, 2, , , , n \text{ pero } E_i \neq S.$$

ii) *La unión de todos los subconjuntos* $\mathbf{E}_i$ *es* **S**, *esto es,*

$$E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n = S.$$

iii) *Los subconjuntos* $\mathbf{E}_i$ *son disjuntos en parejas, esto es,*

$$E_i \cap E_j = \varnothing, \qquad i, j = 1, 2, 3, , , n, \; i \neq j.$$

EJEMPLO 1. Sea $U = \{a,b,c,d,e,f,g\}$. Entonces $E_1 = \{a,b\}$, $E_2 = \{c,d,e,f\}$, y $E_3 = \{g\}$, forman una partición de U, porque

(i) $E_1 \subset U$, $E_2 \subset U$, y $E_3 \subset U$.
(ii) $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = U$.
(iii) $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $E_1 \cap E_3 = \varnothing$, y $E_2 \cap E_3 = \varnothing$.

EJEMPLO 2. Supongamos que lanzamos un par de dados y observamos la suma de los puntos que aparecen en las caras hacia arriba. Sea $S = \{$todas las sumas posibles$\}$, $E_1 = \{$sumas impares$\}$, $E_2 = \{$sumas obtenidas cuando aparecen las mismas caras de los dados$\}$, y $E_3 = \{$sumas pares obtenidas cuando las caras de los dados son diferentes$\}$. ¿Formarán E_1, E_2 y E_3 una partición de S?